

## 初期の歩み

学位を取得した 1992 年夏から 2000 年夏までの私の研究の主なテーマは次の三つに分類することができます：

(a)  **$p$  進 Teichmüller 理論**：(1993 年～1996 年)

この理論は、複素数体上の双曲的リーマン面に対する Koebe の上半平面による一意化や、そのモジュライに対する Bers の一意化の  $p$  進的な類似と見ることができ、また Serre-Tate の通常アーベル多様体に対する標準座標の理論の双曲曲線版と見ることがもできる。詳しくは、

[A Theory of Ordinary  \$p\$ -adic Curves](#)

や

[An Introduction to  \$p\$ -adic Teichmüller Theory](#)

をご参照下さい。

(b)  **$p$  進遠アーベル幾何**：(1995 年～1996 年)

この理論の代表的な定理は、「劣  $p$  進体」( =  $p$  進局所体上有限生成な体の部分体 ) 上の相対的な設定において、双曲的曲線への任意の多様体からの非定数的な射と、それぞれの数論的基本群の間の開外準同型の間自然な全単射が存在するというものである。詳しくは、

[The Local Pro- \$p\$  Anabelian Geometry of Curves](#)

をご参照下さい。

(c) **楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論**：(1998 年～2000 年)

この理論の目標は、複素数体や  $p$  進体上で知られている Hodge 理論の類似を、数体上の楕円曲線に対して Arakelov 理論的な設定で実現することにある。代表的な定理は、数体上の楕円曲線の普遍拡大上のある種の関数空間と、楕円曲線の等分点上の関数からなる空間の間、数体のすべての素点において計量と(ある誤差を除いて)両立的な全単射を主張するものである。この理論は、古典的な**ガウス積分**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

の「離散的スキーム論版」と見ることがもできる。詳しくは、

[A Survey of the Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves I, II](#)

をご参照下さい。

## 新たな枠組への道

Hodge-Arakelov 理論では、**数論的な Kodaira-Spencer 射**が構成されるなど、ABC 予想との関連性を仄めかすような魅力的な側面があるが、そのまま「ABC 予想の証明」に応用するには、根本的な障害があり不十分である。このような障害を克服するためには、

**通常の数論幾何のスキーム論的な枠組を超越した枠組**

が必要であろうとの直感の下、2000年夏から2006年夏に掛けて、そのような枠組を構築するためには何が必要か模索し始め、またその枠組の土台となる様々な**数学的インフラ**の整備に着手した。このような研究活動を支えた基本理念は、次のようなものである：

注目すべき対象は、特定の数論幾何的設定に登場する個々のスキーム等ではなく、それらのスキームを統制する**抽象的な組合せ論的パターン**ないしはそのパターンを記述した**組合せ論的アルゴリズム**である。

このような考え方を基にした幾何のことを、「**宇宙際 (Inter-universal=IU) 幾何**」と呼ぶことにした。念頭においていた現象の最も基本的な例として次の三つが挙げられる：

- ・ ログ・スキームの幾何における**モノイド**
- ・ 遠アーベル幾何における数論的基本群 = **ガロア圏**
- ・ 退化な安定曲線の双対グラフ等、抽象的な**グラフ**の構造

この三つの例に出てくる「モノイド」、「ガロア圏」、「グラフ」は、いずれも、「**圏**」という概念の特別な場合に当たるものと見ることができる。(例えば、グラフの場合、グラフ上のパスを考えることによって圏ができる。)従って、IU幾何の(すべてではないが)重要な側面の一つは、

### 「圏の幾何」

で表されるということになる。特に、遠アーベル幾何の場合、この「圏の幾何」に対応するのは、

### 絶対遠アーベル幾何

( = 基礎体の絶対ガロア群を、元々与えられたものとして見做さない設定での遠アーベル幾何 ) である。

この6年間 ( = 2000年夏 ~ 2006年夏 ) の、

### 「圏の幾何」や絶対遠アーベル幾何

を主テーマとした研究の代表的な例として、次のようなものが挙げられる：

- ・ [The geometry of anabelioids](#) (2001年)

スリム ( = 任意の開部分群の中心が自明 ) な副有限群を幾何的な対象として扱い、その有限次エタール被覆の圏の性質を調べる。特に、 $p$ 進体上の双曲曲線の数論的基本群として生じる副有限群の場合、この圏は、上半平面の幾何を連想させるような**絶対的かつ標準的な「有界性」**等、様々な興味深い性質を満たす。

- ・ [The absolute anabelian geometry of canonical curves](#) (2001年)

$p$ 進 Teichmüller 理論に登場する標準曲線に対して、 $p$ 進体上のものとして初となる絶対遠アーベル幾何型の定理を示す。

・ [Categorical representation of locally noetherian log schemes](#) (2002年)

スキームやログ・スキームが、その上の有限型の(ログ)スキームの圏から自然に復元されるという、1960年代に発見されてもおかしくない基本的な結果を示す。

・ [Semi-graphs of anabelioids](#) (2004年)

古典的な「graph of groups」の延長線上にある「semi-graph of anabelioids」に対して、様々なスキーム論的な「パターン」が忠実に反映されることや、それに関連した「遠アーベル幾何風」の結果を証明する。

・ [A combinatorial version of the Grothendieck conjecture](#) (2004年)

退化な安定曲線に付随する「semi-graph of anabelioids」を、スキーム論が明示的に登場しない、抽象的な組合せ論的枠組で取り上げ、様々な「遠アーベル幾何風」の「復元定理」を示す。

・ [Conformal and quasiconformal categorical representation of hyperbolic Riemann surfaces](#) (2004年)

双曲的リーマン面の幾何を二通りのアプローチで圏論的に記述する。そのうちの一つは、上半平面による一意化を出発点としたもので、もう一つは、リーマン面上の「長方形」( = 等角構造に対応) や「平行四辺形」( = 疑等角構造に対応) によるものである。

・ [Absolute anabelian cuspidalizations of proper hyperbolic curves](#) (2005年)

固有な双曲曲線の数論的基本群から、その開部分スキームの数論的基本群を復元する理論を展開する。この理論を、有限体や  $p$  進体上の絶対遠アーベル幾何に応用することによって、様々な未解決予想を解く。

・ [The geometry of Frobenioids I, II](#) (2005年)

ガロア圏のような「**étale**系」圏構造と、(ログ・スキームの理論に出てくる) モノイドのような「**Frobenius**系」圏論的構造が、どのように作用しあい、またどのように類別できるかを研究する。

### 数体に対する Teichmüller 理論

2006年の後半から、目指すべき理論の形がようやく固まってきて、その理論を記述するための執筆活動が本格的に始まった。この理論の「形」とは、一言で言うと、

**巾零通常固有束付きの正標数の双曲曲線**に対して展開する  $p$  進 Teichmüller 理論と、「**パターンのに**」類似的な理論を、**一点抜き楕円曲線付きの数体**に対して展開する

という内容のものである。因みに、ここに出てくる(数体上の)「一点抜き楕円曲線」の中に、その楕円曲線の上に展開される **Hodge-Arakelov** 理論が含まれている。こ

の理論のことを、「**IU Teichmüller 理論**」 (= 「IU Teich」) と呼ぶことにした。IU Teich の方は、本質的にスキーム論の枠組の外 (= 「IU 的な枠組」) で定式化される理論であるにも関わらず、調べれば調べるほど  $p$  進 Teichmüller 理論 (= 「 $p$  Teich」) との構造的、「パターンの」類似性が、意外と細かいところまで及ぶものであることに幾度となく感動を覚えたものである。

2006 年 ~ 2008 年春の「IU Teich の準備」関連の論文は次の四篇である：

・ [The étale theta function and its Frobenioid-theoretic manifestations](#)  
(2006 年)

$p$  進局所体上の退化する楕円曲線 (= Tate curve) のある被覆の上に存在するテータ関数に付随する Kummer 類を **エタール・テータ関数** と呼ぶ。このエタール・テータ関数や、テータ自明化に付随する Kummer 理論的な対象は、様々な興味深い絶対遠アーベル的な性質や剛性性質を満たしている。これらの性質の一部は Frobenioid の理論との関連で初めて意義を持つものになる。また、このエタール・テータ関数は、IU Teich では、 $p$  Teich における **標準的 Frobenius 持ち上げ** に対応する対象を定める予定である。この Frobenius 持ち上げの類似物を微分することによって ABC 予想の不等式が従うと期待している。このようにして不等式を出す議論は、

「正標数の完全体の Witt 環上の固有で滑らかな種数  $g$  曲線の上に Frobenius 持ち上げが定義されていると仮定すると、その持ち上げを微分して微分層の次数を計算することにより、不等式

$$g \leq 1$$

が従う」

という古典的な議論の IU 版とも言える。

・ [Topics in absolute anabelian geometry I: generalities](#) (2008 年)

このシリーズ (= I, II, III) の主テーマは、絶対遠アーベル幾何を、「Grothendieck 予想型の充満忠実性」を目標とした視点ではなく、「**群論的なアルゴリズム = ソフト**」の開発に軸足を置いた視点で研究するというものである。この第一論文では、様々な準備的な考察を行う。代表的な定理では、玉川安騎男氏に伝え聞いた未出版の結果から、(半)絶対  $p$  進遠アーベル幾何では初となる Grothendieck 予想型の「Hom 版」を導く。因みに、この定理は IU Teich とは直接関係のない結果である。

・ [Topics in absolute anabelian geometry II: decomposition groups](#)  
(2008 年)

IU Teich のための準備的な考察とともに、IU Teich とは論理的に直接関係のない配置空間の絶対遠アーベル幾何や、点の分解群から基礎体の加法構造を絶対  $p$  進遠アーベル幾何的な設定で復元する理論を展開する。ただ、後者の  $p$  進的な理論では、上述の「**Frobenius 持ち上げの微分から不等式を出す**」議論を用いており、哲学的には IU Teich と関係する側面がある。

• [Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms](#) (2008 年)

「Grothendieck 予想型の充満忠実性」を目標とする「双遠アーベル幾何」( = bi-anabelian geometry ) と一線画した「単遠アーベル幾何」( = mono-anabelian geometry ) を数体上の大域的な設定で展開する。これは正に

**IUTeich で用いる予定の遠アーベル幾何**

である。この理論の内容や「IUTeich 構想」との関連性については、論文の Introduction をご参照下さい。

ここで興味深い事実を思い出しておきたい。そもそも Grothendieck が有名な「Faltings への手紙」等で「遠アーベル哲学」を提唱した重要な動機の一つは正に diophantus 幾何への応用の可能性にあったらしい。つまり、遠アーベル幾何(ABC 予想への応用が期待される) IUTeich で中心的な役割を果たすことは、一見して Grothendieck の直感にそぐった展開に見受けられる。一方、もう少し「解像度を上げて」状況を検証すると、それほど単純な関係にあるわけではないことが分かる。例えば、Grothendieck が想定していた応用の仕方では、数体上の「セクション予想」によって数体上の有理点の列の極限を扱うことが可能になるという観察が議論の要となる。これとは対照的に、「IUTeich 構想」では、(数体上のセクション予想ではなく)

**数体と  $p$  進体の両方に対して両立的に成立する (絶対遠アーベル幾何の一種である) 単遠アーベル的アルゴリズム**が主役を演じる

予定である。この「単遠アーベル的アルゴリズム」は、 $p$ Teich における  $\mathcal{MF}^\nabla$ -object の Frobenius 不変量に対応するものであり、即ち  $p$  進の理論における

**Witt 環の Teichmüller 代表元や  $p$ Teich の標準曲線**

の「IU 的類似物」と見ることができる。別の言い方をすれば、この「単遠アーベル的アルゴリズム」は、一種の**標準的持ち上げ・分裂**を定義しているものである。また、(単遠アーベル的)「ガロア系」の対象が  $p$  進の理論における crystal ( =  $\mathcal{MF}^\nabla$ -object の下部 crystal ) に対応しているという状況には、Hodge-Arakelov 理論における「数論的 Kodaira-Spencer 射」( = ガロア群の作用による ) を連想させるものがある。

2008 年 4 月から IUTeich 理論の「本体」の執筆に取り掛かる予定である。この作業は、ごく大雑把に言うと、次の三つの理論を貼り合わせることを主体としたものである：

- [The geometry of Frobenioids I, II](#)
- [The étale theta function and its Frobenioid-theoretic manifestations](#)
- [Topics in absolute anabelian geometry III](#)

因みに、2000 年夏まで研究していたスキーム論的な Hodge-Arakelov 理論がガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

の「離散的スキーム論版」だとすると、IUTeich は、

**このガウス積分の「大域的ガロア理論版ないしは IU 版」**

と見ることができ、また古典的なガウス積分の計算に出てくる「直交座標」と「極座標」の間の座標変換は、(IU版では)ちょうど「[The geometry of Frobenioids I, II](#)」で研究した「Frobenius系構造」と「étale系構造」の間の「比較理論」に対応していると見ることができる。この「本体」の理論は、現在のところ二篇の論文に分けて書く予定である。

・Inter-universal Teichmüller theory I: Hodge-Arakelov-theoretic aspects  
(2009年に完成(?)予定)

$p$ 進 Teichmüller 理論における曲線や Frobenius の、「 $\text{mod } p^n$ 」までの標準持ち上げに対応する IU 版を構成する。

・Inter-universal Teichmüller theory II: limits and bounds (2010年に完成(?)予定)

上記の「 $\text{mod } p^n$ 」までの変形の  $n$  を動かし、 $p$  進的極限に対応する「IU 的な極限」を構成し、 $p\text{Teich}$  における Frobenius 持ち上げの微分に対応するものを計算する。